

****

**زیربرنامه:**

RBF\_Moving\_Mesh3D

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **توسعه دهندگان** | مرتضی نامور |  |
| **تهیه کنندگان مستند** | رضا ربیعی | |
| **تاییدکنندگان** | مرتضی نامور | |
| **تاریخ تنظیم سند** | 28/2/1397 | |
| **شناسه سند** | **MC5F031F1** | |
| **زبان برنامه‌نویسی** | **Fortran 90** | |

1. وظایف

در این زیربرنامه مقدار جابجایی نقاط غیر مرزی با استفاده از روش تابع پایه‌ای شعاعی (RBF) برای یک شبکه سه‌بعدی مشابه با شبکه دوبعدی محاسبه می گردد.

1. توضیحات و تئوری­ها

برای حل مسائل دینامیک سیالات محاسباتی با استفاده از معادلات گسسته‌ی حاکم، استفاده از شبکه‎های محاسباتی ضروری است. با استفاده از شرایط اولیه و شرایط مرزی، معادلات به صورت تکرار شونده[[1]](#footnote-1) در دامنه محاسباتی حل می‌شوند. مرزهای دامنه‌ی محاسباتی می‌توانند ساکن و یا متحرک باشند. در مسائل دینامیک سیالات محاسباتی تعداد زیادی از مسائل وجود دارند که در آن‌ها مرزها متحرک می‌باشند. از جمله‌ی این مسائل می‌توان به جریان خون درون شریان‌ها و یا تکان‌های یک پرچم در حال اهتزاز اشاره نمود. یکی از ساده‌ترین مسائل اندرکنشی، مسائلی هستند که در آن‌ها یک کوپل کردن یک طرفه وجود دارد. جریان سیال در این نوع از مسائل تحت تاثیر حرکت مشخص و از پیش تعیین شده‌ی سازه صلب قرار می‌گیرد. مسائلی مانند Flapping foils و Oscillating Cylinders از این جمله هستند. در حالت‌های پیچیده‌تر نیاز به آن است که یک الگوریتم ترکیب استفاده گردد تا جایی که سازه الاستیک و سیال به حالت تعادل برسند.

در صورتی که مرزهای دامنه محاسباتی متحرک باشند نیاز است تا نقاط داخلی شبکه اعتبار خود را همچنان حفظ کنند. یعنی نباید در شبکه حجم منفی و یا سلول بی کیفیت وجود داشته باشد. برای کار کردن با مرزهای متحرک نیاز است که یا شرایط مرزی به گونه‌ای تغییر کنند که گویی دچار تغییر شکل شده‌اند و یا مرزها دچار تغییر شکل شوند. به روش اول Immersed Boundary Method گفته می‌شود [1]. که یک مرز متحرک را درون یک شبکه دکارتی ثابت تعریف می‌کند. از جمله معایب این روش می‌توان به مشکلات روش در نشان دادن لایه‌ی مرزی و همچنین احتیاجات روش برای ارضای قوانین بقای جرم و مومنتم اشاره نمود [2]. روش دوم که مورد بحث این زیر برنامه نیز است مرزها و به تبع آن‌ها نقاط داخلی را حرکت می‌دهد. حل‌گرهای دینامیک سیالاتی که امروزه موجود هستند از روش‌های متفاوتی برای حرکت مرزها و متعاقبا نقاط داخلی استفاده می‌کنند. برای به دست آوردن یک حل دقیق و بهینه‌ی سیال نیاز به آن است که تا حد امکان شبکه بندی با کیفیت باشد. وقتی از یک حل‌گر اصلاح شبکه استفاده می‌شود به دنبال حرکت مرزها، نقاط داخلی نیز حرکت می‌کنند تا تغییر مکان مرزها را حفظ کنند. برای ارزیابی کیفیت یک حل گر اصلاح شبکه 3 مشخصه مورد نیاز است: کیفیت شبکه، بهینه بودن حل‌گر و قابل اتکا بودن آن.

کیفیت شبکه در شبکه بندی بدون ساختار بیشتر بر اساس زوایای بین شبکه‌ی مثلثی اندازه گرفته می‌شود. هرچقدر این سلول‌ها به مثلث های متساوی الاضلاع نزدیک‌تر باشند، شبکه با کیفیت تر می‌باشد. بهینه بودن را بر اساس تعداد محاسباتی که حل‌گر برای فرآیند اصلاح شبکه در هر گام زمانی انجام می‌دهد، می‌سنجند. هر چقدر این محاسبات کم‌تر باشند حل‌گر بهینه تر منظور می‌شود. قابلیت اتکا نیز بر اساس رابطه‌ای بیان می‌گردد که یک حل‌گر با کاربر برقرار می‌کند. در واقع هرچقدر حل‌گر قابلیت کاربرد بیشتر و نحوه‌ی کار آسان‌تری داشته باشد، حل‌گر قابل اتکا تر می‌باشد. اگرچه روش‌های اصلاح و حرکت شبکه‌ای که تا کنون معرفی شده‌اند، آنقدر مناسب نیستند که در مسائلی با تغییر شکل‌های بزرگ (برای مثال حرکت تیغه‌های پمپ‌ها و بال‌ها توربین‌ها) قابلیت استفاده بدون نیاز به تولید شبکه جدید را داشته باشند. اما در این پروژه سعی می‌گردد تا یک حل‌گر بر اساس یکی از بهینه‌ترین روش‌ها (روش RBF) تهیه گردد.

برای محاسبه‌ی حرکت نقاط درونی شبکه بر اساس جابجایی مرزها تاکنون روش‌های متعددی ارائه شده‌اند. برای شبکه‌های با ساختار منظم روش‌های موثری از جمله Transfinite Interpolation [3] ارائه شده‌اند. در این روش برای محاسبه‌ی جابجایی نقاط داخلی شبکه از میانیابی نقاط مرزی استفاده نمودند. با استفاده از یک فرآیند تصویر کردن[[2]](#footnote-2) اضافه [4] به این روش در صورتی که دوران‌ها و اعوجاج‌ها شدید نیز در مرز رخ دهند، جواب بسیار مناسبی به دست می‌دهد. این روش‌ها برای شبکه‌های با ساختار منظم بسیار مناسب هستند اما برای شبکه‌های بدون ساختار کاربردی ندارند. از آنجا که شبکه‌های بدون ساختار کاربرد گسترده‌ای در مسائل کاربردی دارند و به احتمال زیاد این مسائل نیاز به اصلاح شبکه نیز دارند، بنابراین سعی شده است که در این زیر برنامه اصلاح شبکه برای این نوع از شبکه‌ها بررسی شوند.

مشهورترین روش اصلاح شبکه که برای هر دو نوع شبکه بندی با ساختار و بدون ساختار کاربرد دارد روش همانند سازی فنری خطی [5] است. در این روش ارتباط نقطه به نقطه‌ی نقاط همسایه به شکل یک فنر خطی در نظر گرفته می‌شود. اگرچه این روش از نداشتن قابلیت اتکا رنج می‌برد. به خصوص برای شبکه‌ی بدون ساختار دلخواه [6] برای حفظ کیفیت شبکه نیاز است تا سختی فنر در برخی نقاط به شکل خاصی محاسبه و اعمال گردد. علاوه بر این، روش فنری پیچشی [7] معرفی شد و در [8] نیز برای رفع نقایص این روش بهینه‌سازی هایی انجام شد.

سایر روش‌های اصلاح شبکه بر اساس حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای بر روی جابجایی تمام زمینه‌ی نقاط داخلی با استفاده از جابجایی نقاط مرزی بنا شده‌اند. در خصوص معادلات دیفرانسیل پاره‌ای عمدتا اپراتورهای لاپلاس و بای هارمونیک [9]و [10] در ترکیب با یک ثابت و یا متغییری به شکل ضریب دیفیوژنی (که تابع فاصله می‌باشد)، مورد استفاده قرار می‌گیرند. یک انتخاب دیگر معادلات نیز بر اساس این فرض است که برای جابجایی‌های کوچک یک جامد الاستیک تعادل استاتیکی برقرار است [11] در واقع در این روش شبکه بندی به عنوان یک جسم جامد در نظر گرفته می‌شود. این روش برای مسائلی که در آن تغییر شکل‌های بزرگ رخ می‌دهند و یا دوران‌ها و جابجایی‌های بزرگ اتفاق می‌افتند بهبود یافت [12].

یکی از نقاط ضعف تمام روش‌هایی که تا کنون به آن‌ها اشاره شد این است که این روش‌ها در مسائلی که جسم دارای دوران بزرگی حول محور مشخص است، دچار کاهش شدید کیفیت شبکه می‌گردند. به همین دلیل یک روش جدید برای اصلاح شبکه معرفی شد که بر پایه‌ی توابع پایه‌ای شعاعی هستند ( [13] و [2]). استفاده از این روش نشان داد که کیفیت شبکه با استفاده از این روش به قدر قابل توجهی افزایش می‌یابد.

توابع پایه‌ای شعای در بیشتر متون برای میانیابی داده‌های پراکنده مورد استفاده قرار گرفته بودند. کاربرد توابع پایه‌ای شعاعی بسیار گسترده است. آن‌ها در کارهای گرافیکی رایانه‌ای، ژئوفیزیک و تخمین خطا، شبیه‌سازی جریان ناپایا، جریان‌های مغشوش و .... مورد استفاده قرار گرفته بودند و برای مسائل اندرکنش سازه و سیال نیز به کار گرفته شده اند [13] که از یک روش RBF برای انتقال داده بین دو شبکه بندی جدا استفاده شده است. از آنجا که میانیابی با استفاده از روش RBF برای جابجایی‌های نقاط مرزی بسیار خوب عمل کرد، این ایده متولد شد که از این روش برای محاسبه‌ی جابجایی نقاط داخلی نیز استفاده شود. که اولین مطالعه در این زمینه را نیز می‌توان به دی بوئر[[3]](#footnote-3) نسبت داد. پیش از این مطالعات، از روش RBF برای شبکه‌های با ساختار که به چند بلوک مجزا تقسیم شده بودن، استفاده و گزارش شده بود که استفاده از این روش برای تمام نقاط شبکه به شدت هزینه بر است ( [14]). اما از آنجایی که این روش در ایجاد شبکه‌ای با کیفیت بالا موفق عمل می‌کند، دو روش برای بالا بردن میزان بهینه بودن روش اعمال شدند. مراجع [15]) و ( [16] در زمینه‌ی افزایش بهینه بودن روش کارهایی انجام دادند.

* 1. تابع پایه ای شعاعی[[4]](#footnote-4)

از مزایای روش (RBF) می‌توان به تعمیم پذیری ساده این روش به حالت 3 بعدی و همچنین استفاده در مسائلی که نیاز به تغییر شکل سازه[[5]](#footnote-5) است اشاره نمود. همچنین حفظ کیفیت شبکه در ناحیه‌ی لایه‌ی مرزی نیز از جمله ویژگی‌های این روش اصلاح شبکه به شمار می‌رود. لازم به ذکر است که در این روش نیازی به اطلاعات ساختار شبکه از جمله نحوه اتصال نقاط به یکدیگر و ساختار هندسی شبکه بندی وجود ندارد. این روش تنها با نقاط مرزی[[6]](#footnote-6) در ارتباط است و این موضوع حجم محاسبات را در مقایسه با روش‌های دیگر بسیار کاهش می‌دهد.

* 1. میانیابی با استفاده از RBF

در این پروژه از میانیابی با استفاده از RBF برای محاسبه‌ی جابجایی نقاط درونی (غیر مرزی)، به ازای جابجایی مشخص نقاط مرزی استفاده می‌شود. تابع میانیابی ، جابجایی تمام نقاط شبکه محاسباتی را توصیف می‌نماید. تابع از مجموع توابع پایه‌ای تقریب زده می‌شود [13]و [2]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که مقادیر معلوم جابجایی بر روی مرزها با استفاده از  مشخص می‌گردند و q یک تابع چند جمله‌ای،  تعداد نقاط مرزی و  یک تابع پایه‌ای مشخص [17]و تابعی از فاصله‌ی اقلیدسی می‌باشد [18]. حداقل درجه‌ی تابع چند جمله‌ای q به انتخاب تابع پایه‌ای  بستگی دارد [2]. یک میانیابی یکتا تنها هنگامی وجود دارد که تابع پایه‌ای، یک تابع Positive definite باشد[[7]](#footnote-7). حال اگر  یک تابع Positive definite از مرتبه‌ی  باشد، می‌توان تابع q را یک تابع خطی در نظر گرفت. در این پروژه تنها از توابع پایه‌ای که Positive definite و از مرتبه‌ی  هستند استفاده می‌گردد. یکی از مزایای استفاده از تابع q به شکل خطی، آنست که قابلیت پوشش دهی جابجایی مرزهای جامد را دارا می‌باشد. تابع چند جمله‌ای q را می‌توان با استفاده از ضرایب تعریف نمود که این ضرایب را می‌توان با استفاده از مقادیر معلوم جابجایی بر روی مرزها محاسبه نمود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در اینجا  شامل مقادیر معلوم جابجایی بر روی نقاط مرزی می‌باشد.

از آنجا که تعداد معادلات ناشی از رابطه ‏(2) برابر با تعداد نقاط مرزی می‌باشد هنوز 4 معادله (برای حالت 3 بعدی و 3 معادله برای حالت 2 بعدی) برای مشخص کردن ضرایب تابع چند جمله‌ای q نیاز است تا سیستم معادلات ‏(1) بسته شود.

بنابراین شرط اضافه‌ای باید تعریف گردد که به شکل معادله زیر می‌باشد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در معادله ‏(3)، به تابع چندجمله‌ای اشاره دارد که درجه‌ای کمتر و یا برابر با  داشته باشد. حال با برابری تعداد معادلات و مجهولات، دستگاه معادلات قابلیت حل دارد و به شکل زیر تشکیل می‌گردد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که بردار شامل تمام ضرایب  و  بردار شامل ضرایب چند جمله‌ای q می‌باشد.  یک ماتریس  است که شامل تمام مقادیر تابع پایه‌ای می‌باشد.  یک ماتریس  که سطر jام آن به صورت  است. توجه شود که اندیس b به مرز[[8]](#footnote-8) اشاره دارد و d بیانگر ابعاد مساله است که در این پروژه مساله دو بعدی مد نظر قرار گرفته است. در این برنامه هدف تشکیل ماتریس ضرایب معادله ‏(4) و حل آن است.

در کل این سیستم معادلات به یک سیستم ماتریس چگال منجر می‌شود که حل آن با روش‌های تکرار شونده[[9]](#footnote-9) رایج، دشوار است. بنابراین باید از روش‌های خاصی استفاده نمود که در این پروژه از روش Conjugate Gradiant استفاده شده است.

وقتی که سیستم معادلات حل شد، و  حاصل می‌گردند. در گام بعد باید محاسبه‌ی جابجایی تمام نقاط درونی  (in به نقاط درونی اشاره دارد) با استفاده از تابع ارائه شده در معادله ‏(1) صورت ‌پذیرد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

نتایج حاصل شده از معادله ‏(5) به حل‌گر شبکه متحرک فرستاده می‌شود و در گام بعد این جابجایی‌ها به مختصات شبکه در گام زمانی قبل افزوده می‌شود و مختصات در گام زمانی جدید محاسبه می‌گردند.

یکی از مزایای جالب تابع میانیابی  آن است که جابجایی را برای تمام نقاط تشکیل دهنده (چه نقاط مرزی و چه نقاط داخلی) به درستی به دست می‌دهد بدون آن‌که از نحوه اتصالات نقاط به یکدیگر اطلاعی داشته باشد. همچنین این روش چه برای شبکه‌های با ساختار منظم و چه شبکه‌های بدون ساختار قابلیت استفاده دارد.

اندازه سیستم معادلات در این روش اصلاح شبکه برابر است با یک ماتریس  در حالی که سیستم معادلات برای روش‌هایی که بر پایه‌ی نحوه اتصال نقاط بر یکدیگر استوارند، برابر است با یک ماتریس . می‌توان دریافت که روش RBF در مقایسه با روش‌های دیگر از نظر محاسباتی نیز به صرفه‌تر است. در کل این روش دارای دو گام ساده است:

الف. محاسبه‌ی ضرایب و  با استفاده از مقادیر معلوم جابجایی در مرزها.

ب. محاسبه‌ی جابجایی نقاط داخلی با استفاده از تابع میانیابی .

* 1. توابع پایه‌ای با پوشش جزئی

انواع توابع پایه‌ای در اختیار هستند که برای فرآیند میانیابی می‌توان از آن‌ها استفاده نمود [2]. می‌توان دو دسته از این توابع پایه‌ای را از یکدیگر تمیز داد: توابع با پوشش جزئی و توابع با پوشش کلی. توابع با پوشش جزئی دارای خاصیت زیر می‌باشند:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که  تابعی است که محدوده‌ای در شعاع  را تحت پوشش قرار می‌دهد. هنگامی که از یک شعاع پوشش  استفاده می‌شود، تنها محدود‌ه‌ی دایرو‌ی (برای حالت سه بعدی کروی) به مرکزیت  و به اندازه‌ی شعاع  توسط حرکت نقاط مرزی تحت تاثیر قرار می‌گیرند. در هنگامی که اندازه‌ی شعاع  در نظر گرفته می‌شود، باید در نظر داشت که اندازه‌ی بزرگتر  به منزله‌ی محاسبات دقیق تری برای فرآیند اصلاح شبکه می‌باشد و در عوض حجم محاسبات افزایش می‌یابد. در ‏‏جدول (1) تعدادی از توابع پایه‌ای با پوشش جزئی آورده شده‌اند که تابعی از مقدار مقیاس شده‌ی  می‌باشند. این نوع از توابع به یک‌سری ماتریس spars (ماتریس‌هایی که دارای المان‌های برابر با صفر تقریبا زیادی هستند) می‌گردند.

چهار تابع اول چند درجه‌ای هستند و چهار تابع بعدی بر اساس thin plate spline می‌باشند.

1. توابع پایه‌ای با پوشش جزئی

|  |  |
| --- | --- |
| نام |  |
| CP C |  |
| CP C |  |
| CP C |  |
| CP C |  |
| CTPS C |  |
| CTPS C |  |
| CTPS C |  |
| CTPS C |  |

* 1. توابع پایه‌ای با پوشش کلی

بر خلاف توابع با پوشش جزئی، توابع با پوشش کلی در خارج از یک محدوده‌ی معین برابر با صفر نمی‌شوند و تمام فضای میانیابی را پوشش می‌دهند. این نوع از توابع در نهایت منجر به یک ماتریس چگال می‌گردند. استفاده از توابع پایه‌ای با پوشش کلی، شبکه با کیفیت‌تری در اختیار می‌گذارند. در حالی که توابع با پوشش جزئی از حجم محاسبات کم‌تری برخوردار هستند.

در جدول شش تابع با پوشش کلی که در مسائل شبکه عصبی، گرافیک کامپیوتر و مسائل اندرکنش سازه و سیال مورد استفاده قرار گرفته‌اند، معرفی می‌شود:

1. توابع پایه‌ای با پوشش کلی(این نوع از توابع کل دامنه محاسباتی را پوشش می‌دهند)

|  |  |
| --- | --- |
| نام |  |
| Thin Plate Spline |  |
| Multiquadratic Bi-harmonics |  |
| Inverse Multiquadratic Bi-harmonics |  |
| Quadric Bi-harmonics |  |
| Inverse Quadric Bi-harmonics |  |
| Gaussian |  |

* 1. اجرا در برنامه

برای وضوح بیشتر نحوه اجرای روش RBF در یک کد سعی می‌گردد تا آنچه که تاکنون به عنوان مفاهیم ریاضی روش بیان شده است، به صورت جزئی تر بیان گردد تا متن وضوح بیشتری داشته باشد.

در مسائل دینامیک سیالات محاسباتی، دامنه محاسباتی به دو بخش نواحی داخلی و مرزی تقسیم می‌گردند. روش‌های اصلاح شبکه برپایه‌ی تغییرات مختصات نقاط مرزی قرار گرفته اند، به عبارت دیگر در همه‌ی این روش‌ها باید در ابتدا جابجایی نقاط مرزی به عنوان یک معلوم تعیین گردد و در گام بعد جابجایی نقاط داخلی محاسبه می‌شوند.

بردار جابجایی نقاط مرزی  شامل مقادیر معلوم جابجایی برای نقاط گسسته می‌باشد. تابع میانیابی ، قابلیت محاسبه‌ی جابجایی نقاط (اعم از داخلی و مرزی) را دارا می‌باشد. بنابراین همان طور که در معادله ‏(5) بیان شد: . برای هر نقطه مرزی  بر اساس معادله ‏(1) وجود دارد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

بر اساس معادله ‏(7)، اگر تعداد نقاط مرزی برابر باشد با  پس به تعداد  معادله وجود دارد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

باید توجه شود که  ، به اشاره دارد.

در معادله ‏(8) مجهولات عبارتند از بردار ضرایب  که عبارت است از  و  عضو دارد و همچنین بردار  که عبارت است از  و 4 عضو[[10]](#footnote-10) دارد.

تا کنون تعداد معادلات است در حالی که تعداد مجهولاتمی‌باشد. بنابراین باید یکسری معادلات دیگر برای بستن سیستم معادلات اضافه شود که این معادلات بر اساس رابطه ‏(3) اضافه می‌گردند.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

حال دستگاه معادلاتی مجموع از معادلات ‏(8)‏ و (9) به شکل رابطه ‏(10) حاصل می‌گردد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. پیاده سازی

بطور خلاصه می توان گفت که در روش RBF هدف به دست آوردن ضرایب تابع میانیابی  می‌باشد که باید ضرایب مجهول آن یعنی و  مشخص شوند. این ضرایب با حل شدن دستگاه معادلات  بدست می آیند که  به ماتریس ضرایب اختصاص دارد و بر اساس ‏(11) محاسبه می‌گردد.

1. محاسبه‌ی ماتریس معلومات

بردار  که در واقع بردار باقیمانده سیستم معادلات هستند با توجه به جهت جابجایی و با استفاده از ماتریس نشان داده شده در ‏(13) مشخص می‌گردند. برای مثال اگر جابجایی در جهت x را با  نشان دهیم، بنابراین بردار b به شکل  تعریف می‌گردد. همچنین با استفاده از جابجایی‌ها در جهت y بصورت  می باشد که در این بخش تعیین می شود.

1. محاسبه‌ی ماتریس ضرایب

ماتریس ضرایب نیز با توجه به رابطه ‏(11) و با فراخوانی زیربرنامه مربوطه مشخص می گردد.

1. حل دستگاه معادلات 

برای حل دستگاه‌های معادلات، نیاز به حل‌گرهای خاص ماتریس است. در این زیر برنامه با توجه به شرایط ماتریس از روش Conjugate Gradient استفاده شده است. ماتریس ضرایب  برای جابجایی ها در هر دو جهت x و y یکسان هستند. زیرا این ماتریس بر اساس توابع میانیابی ایجاد شده اند که تنها تابعی از فاصله‌ی بین نقاط مرزی هستند..

1. محاسبه‌ی جابجایی نقاط

بعد از محاسبه‌ی ضرایب و بدست آوردن تابع میانیابی  محاسبه‌ی جابجایی نقاط با استفاده از زیربرنامه مربوط به اینکار صورت می‌پذیرد.

.

1. مراجع
2. C. S. Peskin, “The immersed boundary method,” Acta Numerica, p. 479–517, 2002.
3. F. M. BOS, “Numerical simulations of flapping foil and wing aerodynamics (Mesh deformation using radial basis functions),” TU Delft University, Delft, 2010
4. Z. J. Wang و A. J. Przekwas, “Unsteady flow computation using moving grid with mesh enrichment,” 1994.
5. Z. J. Wang, “Vortex shedding and frequency selection in flapping flight,” Journal of Fluid Mechanics , NUM 410, p. 323–341, 2000.
6. J. T. Batina, “Unsteady Euler Airfoil Solutions Using Unstructured Dynamic Meshes,” AIAA Journal, p. 1381–1388, 1990.
7. F. J. Blom, “Considerations on the spring analogy,” nternational Journal for Numerical Methods in Fluids, NUM 32, p. 647–669, 2000.
8. C. Farhat, C. Degrand, B. Koobus و M. Lesoinne, “Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes,” Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, NUM 163, pp. 231-245, 1998.
9. C. Degand و C. Farhat, “A Three-Dimensional Torsional Spring Analogy Method for Unstructured Dynamic Meshes,” Computers and Structures, NUM 80, pp. 305-3.16, 2002.
10. R. Lohner و C. Yang, “Improved ale mesh velocities for moving bodies,” Communications in Numerical Methods in Engineering , V 12, p. 599–608, 1994.
11. B. T. Helenbrook, “Mesh deformation using the biharmonic operator,” International Journal for Numerical Methods in Engineering , NUM 56, p. 1007–1021, 2003.
12. A. Johnson و T. E. Tezduyar, “Mesh update strategies in parallel finite element computations of flow problems with moving boundaries and interfaces,” Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering , NUM 119, p. 73–94, 1994.
13. R. P. Dwight, “Robust mesh deformation using the linear elasticity equations,” IN Computational Fluid Dynamics 2006, 2004.
14. Boer de, M. S. van der Schoot و H. Bijl, “Mesh deformation based on radial basis function interpolation,” Computers and Structures , 85, p. 784–795, 2007.
15. M. A. Potsdam و G. P. Guruswamy, “A parallel multiblock mesh movement scheme for complex aeroelastic applications,” AIAA, 2001.
16. S. Jakobsson و O. Amoignon, “Mesh deformation using radial basis functions for gradient-based aerodynamics shape optimization,” Computers and Fluids, NUM 36, p. 1119–1136, 2007.
17. T. C. S. Rendall و C. B. Allen, “Improved radial basis function fluid-structure coupling via efficient localised implementation,” International Journal for Numerical Methods in Engineering , NUM 78, p. 1188–1208, 2008.
18. M. Buhmann, “Radial basis functions,” Acta Numerica, pp. 38-1, 2000.
19. J. P. Miles و M. Farrashkhalvat, Basic Structured Grid Generation: With an Introduction to Unstructured Grid Generation, Butterworth-Heinemann Limited, 2003.
20. H. Baruh, Analytical Dynamics, McGraw-Hill Inc, 1999.

1. Iterative [↑](#footnote-ref-1)
2. Mapping [↑](#footnote-ref-2)
3. de Boer [↑](#footnote-ref-3)
4. Radial Basis Function [↑](#footnote-ref-4)
5. Morphing [↑](#footnote-ref-5)
6. هر نقطه‌ای با جابجایی مشخص. این جابجایی می‌تواند صفر و یا مقداری مشخص باشد. [↑](#footnote-ref-6)
7.   for all non-zero vectors **x** in **R***n* [↑](#footnote-ref-7)
8. boundary [↑](#footnote-ref-8)
9. Iterative [↑](#footnote-ref-9)
10. توجه شود که ضریب  به ابعاد مساله بستگی دارد. برای مثال برای یک شبکه بندی دو بعدی با حذف مختصات z در معادلات ضریب  به پیروی حذف می شود. [↑](#footnote-ref-10)